10/1/2020

Θεωρία Συνόλων

$A \cong \mathbb{N}$, A αριθμ.

B άπειρο, $\Rightarrow \exists\, X \subseteq B$
$$X \cong \mathbb{N}$$

Ορισμός. Το A το πολύ αριθμήσιμο αν_ν A πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

Παρατ: $A \subseteq B \Rightarrow A$ το πολύ αριθμ.
B: αριθμήσιμο

i) A πεπερασμένο $\Rightarrow$ A το πολύ αριθμήσιμο.

ii) A άπειρο $\subseteq B \Rightarrow A$ –//– –//–
B: αριθμ.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $A \neq \emptyset$ ΤΑΕΙ:
1) Το A είναι το πολύ αριθμ.
$\Updownarrow$
2) $\exists\, g : \mathbb{N} \to A$ επί
$\Updownarrow$
3) $\exists\, f : A \to \mathbb{N}$ 1-1

1⇒2 A το πολύ αριθμήσιμο $\Rightarrow$ Αριθμήσιμο: $\exists\, h : \mathbb{N} \to A$ 1-1, επί

$\vee$ Πεπερασμένο:

$\exists\, n \in \mathbb{N} : A \cong n$, $\exists\, h : n \to A$ 1-1 και επί.

$g : \mathbb{N} \to A$ επί

$n = \{0,1,2,\dots,n-1\} \xrightarrow{h} A$, 1-1, επί

$g(x) = h(x)$ $x \in n$
$\quad = h(0)$ $x \in \mathbb{N} - n$

g επί

2) ⇒ 3) $g: \mathbb{N} \to A$ επί

Θέλουμε να κατασκ. $f: A \to \mathbb{N}$ 1-1

$$f: A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} f(A) \subseteq \mathbb{N}$$

$y \in A \to f(y)$

$\exists\ g^{-1}(\{y\}) \overset{y \in A}{\neq \emptyset}\ (g \text{ επί}) \subseteq \mathbb{N}$

$\Pi_y = \min_{\mathbb{N}} g^{-1}(\{y\}) \in \mathbb{N}$

$f(y) = \Pi_y$ | $f: 1-1$ $y \neq y'$ $g^{-1}(\{y\}) \cap g^{-1}(\{y'\})$

$f: (A) \to \mathbb{N}$

$\exists f: A \to B$ $n-1$

$\exists\ h: B \to A$ επί

3) ⇒ 1) $\exists\ f: A \to \mathbb{N}$ 1-1 $\Rightarrow A$ το πολύ αριθμ.

$f: A \xrightarrow[\text{επ}]{1-1} f(A) \subseteq \mathbb{N}$

$A \cong f(A) \subseteq \mathbb{N}$

A το πολύ αριθμ. $\Leftarrow$ Το πολύ αριθμ. ως υποσύνολο ενός αριθ. συνόλου.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> A_n $\forall n \in \mathbb{N}$ το πολύ αριθμήσιμο $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ το πολύ αριθμ.

$\{A_1, A_2, \dots, A_k, \dots\}$

<u>Αποδ</u>

Αν $n \in \mathbb{N}$ ① $\Rightarrow \exists\ f_n: A_n \to \mathbb{N}$ 1-1.

<u>Στόχος</u> $f: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \cong \mathbb{N} \\ A_2 \cong \mathbb{N} \end{array}\right\} A_1 \cup A_2 \cong \mathbb{N}.$$

$A_1 \cong \mathbb{N} \cong \mathbb{N}_\alpha$

$n \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} 2n$

$A_2 \cong \mathbb{N} \cong \mathbb{N}_\pi$

$n \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} 2n+1$

$\Rightarrow A_1 \cup A_2 \cong \mathbb{N}_\alpha \cup \mathbb{N}_\pi = \mathbb{N}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Έχουμε δεί ότι.

$$\left.\begin{array}{l} A \cong C \\ B \cong D \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B \cong C \cup D$$

$A \cap B = \emptyset = C \cap D$

$A \cup B \cup E \cong F \cup C \cup D.$

$f_n : A_n \to \mathbb{N}$ 1-1, $\forall n = 1, 2, \ldots$

$f : \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \to \mathbb{N}$

- $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} : x \in A_k.$

$\emptyset \neq \{k \in \mathbb{N} : x \in A_k\} \subseteq \mathbb{N}.$ καλά διατεταγμένο

$\emptyset \neq S_x \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow S_x$ έχει ελάχιστο $k(x) .= \min_{\mathbb{N}}(S_x).$

$x \in A_{k(x)}.$

$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow k(x)$ προσδόρισης.

$f(x) \in \mathbb{N}$ τότε $f(x) = 2^{k(x)} \cdot 3^{f_{k(x)}(x)}$ (φυσικός, φυσικός)

$k(x)$, $x \in A_{k(x)}$

$f_{k(x)} : A_{k(x)} \to \mathbb{N}$ 1-1

$x \in A_{k(x)}$, $f_{k(x)}(x).$

$f : \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \to \mathbb{N}$ συνάρτηση

- διαλέγω σχετικά δυο πρώτους αριθμούς.

πχ Το 5 δεν $\notin f(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ άρα f όχι επί

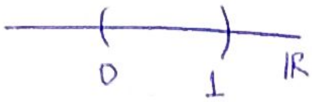
- f 1-1: $x, y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, ώστε $f(x) = f(y)$ ① δο $x = y$. ②
- f όχι επί

Από ① $2^{k(x)} 3^{f_{k(x)}(x)} = 2^{k(y)} 3^{f_{k(y)}(y)}$ Αν υποθ ότι $k(x) \neq k(y) \Rightarrow$ για παράδειγμα $k(x) > k(y)$

$2^{k(x)-k(y)} = 3^{f_{k(y)}(y) - f_{k(x)}(x)}$ όχι άρτιος Άτοπο $\Rightarrow k(x) = k(y) = k$

$3^{f_k(x)} = 3^{f_k(y)} \Rightarrow f_k(x) = f_k(y) \Rightarrow x = y$ (f_k 1-1)

ΠΡΟΤΑΣΗ



(0,1) όχι αριθμήσιμο (υπεραρ)

$\left\{ \frac{1}{n} \;\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \right\} \subseteq (0,1)$

$A = (0,1)$

Αν A δεν είναι υπεραριθμήσιμο $\Rightarrow A \cong \mathbb{N}$

$\exists \; f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} A$

$\{y_0, y_1, y_2, \dots\} = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε $x \in (0,1)$ γράφεται μοναδικά ως εξής $x = 0,x_1 x_2 x_3 \dots$, όπου για άπειρους δείκτες $i = 1, 2, \dots$

$x_i \neq 0$

$0,1 = \boxed{0,0999}$ ✓μοναδική γραφή

$0,232323\dots$

$0,010101$

μοναδικά

$y_0 = 0, x_{01} x_{02} x_{03} \dots x_{0n} \dots$ για άπειρους (i) $x_{0i} \neq 0$

μοναδικά

$y_1 = 0, x_{11} x_{12} x_{13} \dots x_{1n} \dots$

ο αριθμός αυτός γράφεται:
$(0,\alpha\beta) = \frac{\alpha}{10}, \frac{\alpha}{10^2} \quad 0 \leq \beta \leq 9$

$\vdots$

$y_k = 0, x_{k1} x_{k2} x_{k3} \dots x_{kn} \dots$ για άπειρους δείκτες (i)

$x_{ki} \neq 0 \;\; \forall \; k = 0, 1, \dots$

Ψάχνουμε $y \in (0,1)$, $y \neq y_0$, $y \neq y_1, \dots, y \neq y_k$ $\forall k = 0,1,2,\dots$

$$y = 0, z_1\, z_2\, z_3 \dots z_n$$

$\underbrace{\text{με } z_1 \neq 0 \text{ και } z_1 \neq x_{01}}_{\Downarrow\; y \neq y_0}$ | $z_2 \neq 0$ και $z_2 \neq x_{12}$ | κλπ. (Παίρνω την διαγώνιο).

$\dots z_n \neq 0$ κ $z_n \neq x_{n-1,n}$.

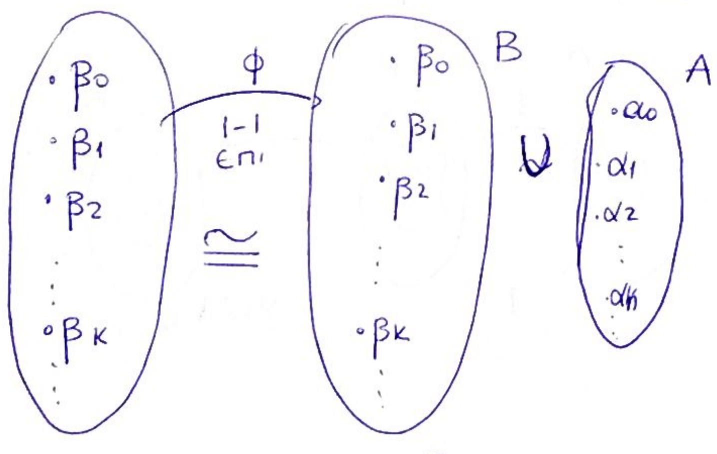
<u>ΆΣΚΗΣΗ</u>

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ άπειρο} \\ A \cong \mathbb{N} \\ A \cap B = \phi \end{array}\right| \Rightarrow A \cup B \cong B$$

Το $(0,1)$ δεν είναι αριθμήσιμο γιατί μπορεί και να γραφεί:

$$\mathbb{N} < (0,1) \cong (0,1) \cup A$$

B άπειρο $\Rightarrow \exists \overset{\cong \mathbb{N}}{\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots\}} \subseteq B$ $\beta_k \neq \beta_\lambda$, $k \neq \lambda$



ϕ 1-1 επί το στέλνω $\beta_0 \to \beta_0$ κλπ.

ονομάζω $B_1 = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots\}$

$B_1 \cong \mathbb{N} \cong A$, $A \cap B = \phi$, $A \cap B_1 = \phi$

$B_1 \subseteq B$

$$\left.\begin{array}{l} A \cong \mathbb{N} \\ B_1 \cong \mathbb{N} \end{array}\right\} A \cup B_1 \cong \mathbb{N} \cong B_1$$

$A \cup B = (A \cup B_1) \cup (B \setminus B_1)$

→ μεταξύ τους ξένα

$A \cup B = (A \cup B_1) \cup (B \setminus B_1) \cong B_1 \cup (B \setminus B_1) \cong (B - B_1) \cong B$

$A \cup B_1 \cong B_1$

$B \setminus B_1 = B - B_1$

$(A \cup B_1) \cap (B \setminus B_1) = \emptyset = B_1 \cap (B - B_1)$.

Άρα $\Rightarrow A \cup B \cong B$.

$A \cong B$ $\quad \exists f : A \to B$ (1-1 και επί)

$A \le B \overset{\text{ορισμ}}{\Longleftrightarrow} \exists f : A \to B$ 1-1 $\Longleftrightarrow \exists g : B \to A$ επί

$B \le A \Leftrightarrow \exists h : B \to A$ 1-1.

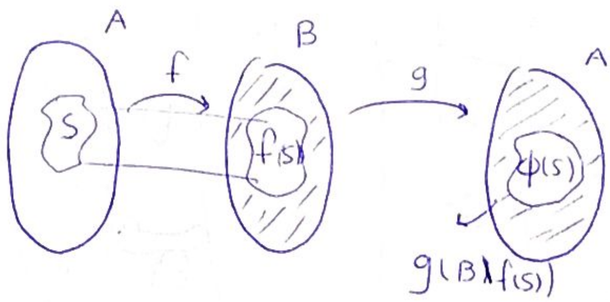
$A \cong B \Rightarrow A \le B$ και $B \le A$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Bernstein Shroder

Αν έχω A, B δύο σύνολα, ώστε $A \le B$ και $B \le A \Rightarrow A \cong B$

Κατασκευάζω την σχέση $\phi : P(A) \to P(A)$, $S \subseteq A \to \phi(S) \subseteq A$

που δίνεται από τον τύπο:
($\exists f : A \to B$ 1-1, $\exists g : B \to A$ 1-1)



$\phi(S) = A \setminus g(B / f(S))$

$S \subseteq A \Rightarrow \phi(S) \subseteq A$, ϕ καλά ορισμένη

$S_1 \subseteq S_2 \subseteq A \Rightarrow \phi(S_1) \subseteq \phi(S_2)$

Αν $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow f(S_1) \subseteq f(S_2) \Rightarrow B \setminus f(S_1) \supseteq B \setminus f(S_2) \Rightarrow g(B - f(S_1)) \supseteq g(B \setminus f(S_2))$

$\Rightarrow A - g(B \setminus f(S_1)) \subseteq A \setminus g(B - f(S_2)) \Rightarrow \phi(S_1) \subseteq \phi(S_2)$ (αύξουσα)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ
ΛΗΜΜΑ
$\phi: P(A) \to P(A)$ ώστε $S_1 \subseteq S_2 \subseteq A \Rightarrow \phi(S_1) \subseteq \phi(S_2)$ (αύξουσα)

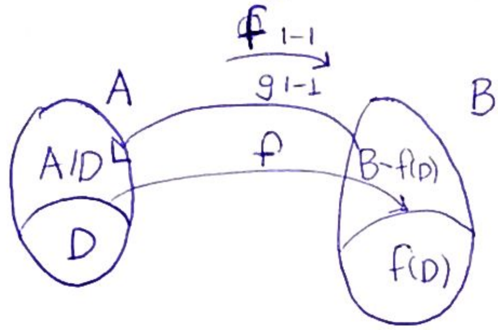
τότε $\exists\ D \subseteq A : \phi(D) = D$

$\phi: P(A) \to P(A)$
$\phi(S) = A \setminus g(B \setminus f(S))$ Χρήση του ΛΗΜΜΑΤΟΣ

$\Rightarrow \exists\ D \subseteq A$ ώστε $\phi(D) = D$

$A \setminus g(B \setminus f(D)) = D$ (1)

(1) $\Leftrightarrow A / D = g(B \setminus f(D))$ (2)



$\Longrightarrow A \cong B$ ισοπληθικά

Ορίζω $h: A \to B$

$h(x) = f(x) \quad x \in D$

$= (g/_{B \setminus f(D)})^{-1}(x)$

$f: A \to B$ 1-1 | $f/_D : D \to f(D)$ 1-1
$g: B \to A$ 1-1 | $g/_{B \setminus f(D)} : B \setminus f(D) \to A - D$ 1-1

$h: A \to B$ συνάρτηση

h 1-1 διότι αν $x_1 \neq x_2$, $x_i \in A \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$
$i = 1, 2$

(με περιπτώσεις) 1) $x_1, x_2 \in D \xRightarrow[1-1]{f/D} f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$

2) $x_1, x_2 \in A/D \Rightarrow \dots \quad \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$
$g/_{B \setminus f(D)}$ 1-1

3) $x_1 \in D$, $x_2 \in A/D$ $\quad h(x_1) \in f(D)$
$h(x_2) \in B - f(D)$
δηλ. $h(x_1) \neq h(x_2)$

h επί $h: A \to B$ διότι $y \in B \Rightarrow \exists x \in A : h(x) = y$ i) $y \in f(D) \Rightarrow y = f(x)$ για $x \in D$

ii) $y \in B \setminus f(D), \exists x$ $\quad (g/_{B \setminus f(D)})^{-1}(x) = y$ $\quad \Rightarrow h(x) = y$

$\Leftarrow\Rightarrow \quad x = g/_{B \setminus f(D)}(y).$

Άρα $A \cong B$.